Reihenentwicklungen

8

Was ist eine Potenzreihe?

Unter welchen Umständen konvergieren Potenzreihen?

Was ist eine Taylor-Reihe?

Was ist eine Fourier-Reihe?

Teil II

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_8

Wenn es möglich ist, eine gegebene Funktion mithilfe einer unendlichen Reihe darzustellen, ergibt sich die Gelegenheit, durch Betrachtung von Partialsummen Funktionswerte approximativ zu bestimmen. Eine wichtige Rolle bei derartigen Reihenentwicklungen spielen Potenzreihen (Polynome sind Partialsummen von Potenzreihen). Liegt für eine Funktion eine Reihenentwicklung in Form einer Potenzreihe vor, so besteht die Möglichkeit der Näherung der Funktion durch ein Polynom. Dieses Konzept stellt eines der wichtigsten Hilfsmittel der numerischen Mathematik dar.

8.1 Potenzreihen

Potenzreihen können als Polynome mit beliebig vielen Summanden aufgefasst werden

Definition: Potenzreihe und Konvergenzradius

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \tag{8.1}$$

heißt **Potenzreihe**. Die Zahl

$$r := \sup\{|x-x_0| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \text{konvergent}\}$$

wird als **Konvergenzradius** der Potenzreihe (8.1) bezeichnet.

Wir können Potenzreihen als Erweiterung des Polynombegriffs auffassen, indem wir unendlich viele Summanden zulassen. Jedes Polynom ist dabei ebenfalls eine Potenzreihe, allerdings sind bei Polynomen nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0.

Die Konvergenz einer Potenzreihe ist abhängig vom Parameter *x*

Eine Potenzreihe enthält einen freien Parameter x. Die Konvergenz der Potenzreihe ist somit im Regelfall von der Wahl dieses Parameters abhängig. Für $x = x_0$ ist jede Potenzreihe trivialerweise konvergent, denn es gilt in diesem Fall

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 0^k = a_0.$$

Wir beachten dabei, dass wegen $0^0 = 1$ in dieser Reihe bis auf den ersten Summanden a_0 alle übrigen Summanden wegfallen. Wenn für ein $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe (8.1) absolut konvergent ist und $x' \in \mathbb{R}$ eine weitere Zahl ist mit $|x'-x_0| \le |x-x_0|$, so ist

$$|a_n(x'-x_0)^n| = |a_n||x'-x_0|^n \le |a_n||x-x_0|^n = |a_n(x-x_0)^n|.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert daher auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x'-x_0)^k$$

absolut. Wenn wir also ein $x \in \mathbb{R}$ finden, für das die Potenzreihe absolut konvergiert, so konvergiert die Potenzreihe auch absolut für jedes weitere $x' \in \mathbb{R}$, dessen Abstand zu x_0 kleiner ist als der Abstand von x zu x_0. Für $x \ne x_0$ ist die Potenzreihe also konvergent, wenn der Abstand von x zu x_0 kleiner ist als der Konvergenzradius r. Die Menge

$$D := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < r\} = (x_0-r, x_0+r)$$

ist somit das größte offene Intervall um x_0, in dem die Potenzreihe (absolut) konvergiert. Ihr Grenzwert hängt dabei von x ab. Für $x \in D$ ist auf diese Weise durch die Potenzreihe (8.1) eine Funktion (Grenzfunktion)

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \end{aligned}$$

definiert. Wir betrachten nun einige bereits kennengelernte Reihen als Beispiele von Potenzreihen.

Beispiel

1. Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot (x-0)^k$$

stellt eine Potenzreihe mit $a_k = 1$ für alle $k \ge 0$ und $x_0 = 0$ dar. Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius $r = 1$, da die geometrische Reihe genau dann konvergiert, wenn $|x| = |x-0| < 1$ ist. Für die Grenzfunktion gilt dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

2. Die Exponentialreihe

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-0)^k$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent. Der Konvergenzradius ist daher $r = \infty$. Hier gilt $a_k = \frac{1}{k!}$ und $x_0 = 0$. Die Grenzfunktion der Exponentialreihe ist die Exponentialfunktion.

3. Die Sinus- und Kosinusreihen sind ebenfalls Potenzreihen mit $x_0 = 0$ und Konvergenzradius $r = \infty$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots.$$

Hier fällt auf, dass in beiden Reihen die zugrundegelegte Zahlenfolge a_k jeweils für jeden zweiten Folgenindex verschwindet. Bei der Sinusreihe sind es alle Folgenglieder mit geradem Index, d. h. nur die Folgenglieder mit ungeradem Index tragen zur Summe bei:

$$a_k := \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{1}{k!} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

während beim Kosinus alle Folgenglieder mit ungeradem Index verschwinden und nur die Folgenglieder mit gradzahligem Index einen Summenbeitrag liefern:

$$a_k := \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1}{k!}, & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

◀

Zur Bestimmung des Konvergenzradius ist der folgende Satz nützlich.

Satz

Für den Konvergenzradius r der Potenzreihe (8.1) gilt

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} := \lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geq n\}.$$

Falls es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, d. h., fast alle Folgenglieder sind ungleich 0, so gilt

$$r = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_0}} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|.$$

Beispiel

1. Eine Potenzreihe kann den Konvergenzradius $r = 0$ besitzen, also nur für $x = x_0$ konvergieren:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! \cdot x^k = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \cdots .$$

Da hier $a_n = n!$ ist, gilt nach dem letzten Satz

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Ein weiteres Beispiel für eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k \cdot x^k = 1 + 1x + 4x^2 + 27x^3 + 256x^4 + \cdots .$$

Hier ist $a_n = n^n$. Nach dem letzten Satz gilt

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \limsup_{n\to\infty} n = \infty.$$

Damit gilt in diesem Beispiel $r = 0$. Wir haben mit dem letzten Satz eine Möglichkeit, Konvergenzradien zu berechnen. Betrachten wir als Beispiel die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (x-5)^k,$$

so folgt für den Konvergenzradius dieser Reihe

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n|} = \limsup_{n\to\infty} 2 = 2$$

und damit $r = \frac{1}{2}$. Diese Zahl hätten wir auch alternativ über die zweite Formel aus dem letzten Satz berechnen können:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. Eine dritte Möglichkeit, den Konvergenzradius dieser Reihe zu berechnen, besteht in einem Vergleich der Potenzreihe mit der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (x-5)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2(x-5))^k =: \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Wir fassen also die Potenzreihe als geometrische Reihe mit $q = 2(x-5)$ auf. Da die geometrische Reihe genau für $|q| < 1$ konvergiert, haben wir nun die Möglichkeit, die $x \in \mathbb{R}$ zu identifizieren, für welche die Ausgangsreihe konvergiert. Die Konvergenz ist also gegeben, wenn

$$|q| < 1 \iff |2(x-5)| < 1 \iff |x-5| < \frac{1}{2} =: r.$$

Der Konvergenzradius ist also $r = \frac{1}{2}$. Damit konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-5| < \frac{1}{2}$, d. h. für alle $x \in (5 - \frac{1}{2}, 5 + \frac{1}{2})$. ◀

8.2 Taylor-Entwicklung

Potenzreihen bilden die Grundlage für die Definition und die Untersuchung der Taylor-Reihen. Hier geht es grob gesprochen darum, eine beliebig oft differenzierbare Funktion durch eine Potenzreihe darzustellen. Dies hat eine grundlegende Bedeutung für die reelle, aber erst recht für die komplexe Analysis, die Funktionentheorie. Aber auch die Angewandte Mathematik

Teil II

profitiert ganz entscheidend von der Möglichkeit, Funktionen als Reihendarstellungen zu betrachten.

Satz: Taylor-Formel

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $n+1$ mal stetig differenzierbare Funktion. Darüber hinaus sei x_0 eine beliebige Zahl aus dem Definitionsbereich von f. Dann kann $f(x)$ für jedes $x \in (a, b)$ dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n(x) \qquad (8.2)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - \xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \qquad (8.3)$$

Zudem gibt es zu $x \in (a, b)$ eine Stelle $\zeta \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0))$ zwischen x und x_0, sodass für das **lagrangesche Restglied**

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta)(x - x_0)^{n+1} \qquad (8.4)$$

gilt. Hierbei wird mit

$$f^{(k)} := \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

die k-te Ableitung von f bezeichnet, wobei mit der nullten Ableitung, wie üblich, die Funktion selbst gemeint ist.

Die Taylor-Formel ist eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung

Für den Spezialfall $n = 0$ erhalten wir aus der Taylor-Formel den Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung): Es existiert eine Stelle ζ zwischen x_0 und x, in der die Ableitung von f mit dem Differenzenquotienten von f zwischen x_0 und x übereinstimmt:

$$f'(\zeta) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (8.5)$$

Denn wenn wir die Taylor-Formel für $n = 0$ auswerten, so ergibt sich

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{0!} f(x_0)(x - x_0)^0}_{=f(x_0)} + R_0(x),$$

wobei

$$R_0(x) = \underbrace{\frac{1}{1!} f'(\zeta)(x - x_0)^1}_{=f'(\zeta)(x-x_0)}.$$

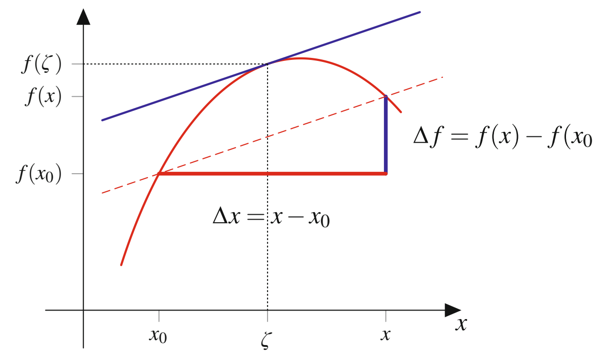

Abb. 8.1 Zur Aussage des Mittelwertsatzes

Das Auflösen dieser Gleichung nach $f'(\zeta)$ ergibt dann die Aussage (8.5). Es gibt also eine Stelle im Definitionsintervall von f, in der die Tangente an den Graphen parallel ist zur Sekante, die durch die Funktionswerte in den Randpunkten des betrachteten Intervalls definiert ist, wie in Abb. 8.1 zu erkennen ist. Die Taylor-Formel verlangt hierzu die stetige Differenzierbarkeit von f auf einem Intervall (a, b). Wenn f zudem in den Randpunkten a und b stetig ist, können wir nun unser Ergebnis wie folgt formulieren: Es gibt ein $\zeta \in (a, b)$ mit $f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es kann sogar gezeigt werden, dass statt der stetigen Differenzierbarkeit die Differenzierbarkeit von f auf dem Intervall (a, b) bereits ausreicht.

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die (mindestens) auf (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\zeta \in (a, b)$ mit

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Eine Folge dieses Satzes ist, dass es bei jeder Funktion dieser Art, die zudem in den Intervallgrenzen identische Werte besitzt, für die also $f(a) = f(b)$ gilt, eine Nullstelle ihrer Ableitung in (a, b) geben muss (Satz von Rolle). Speziell folgt hieraus, dass zwischen zwei Nullstellen von f (mindestens) eine Nullstelle ihrer Ableitung f' liegen muss.

Betrachten wir die Taylor-Formel für $n = 1$, so erhalten wir eine (affin-)lineare Approximation von f:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Dabei ist $R_1(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} (x_0 - \xi) f^{(2)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 0$. Für $n = 2$ erhalten wir in vielen Fällen eine verbesserte linear-quadratische Approximation:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x) \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

Auch hier ist $R_2(x_0) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0} (x_0 - \xi)^2 f^{(3)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 0$.

8.1 Mathematischer Hintergrund: Beweis der Taylor-Formel

Die Gültigkeit der Taylor-Formel kann mithilfe der Integralrechnung induktiv sehr leicht bewiesen werden. Im Induktionsanfang $n = 0$ ergibt sich die Formel aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

denn umgestellt nach $f(x)$ erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{0!} f^{(0)}(x_0)(x-x_0)^0 + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^0 f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Laut Induktionsvoraussetzung gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{=R_n(x)}.$$

Nun berechnen wir $R_n(x)$ mithilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \underset{\uparrow}{(x-\xi)^n} \underset{\downarrow}{f^{(n+1)}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{n!}\left(\left[\frac{-1}{n+1}(x-\xi)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \tfrac{-1}{n+1}(x-\xi)^{n+1} f^{(n)}(\xi)\mathrm{d}\xi \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^{n+1} f^{(n)}(\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^{n+1} f^{(n)}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

folgt also

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \\ &\qquad + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + R_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

wodurch sich die Formeln (8.2) und (8.3) mit einem zusätzlichen Summanden für $n + 1$ ergeben.

Für das Restintegral in (8.3) gibt es nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\zeta \in [\min(x, x_0), \max(x, x_0)]$ mit

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) \int_{x_0}^{x} (x-\xi)^n\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) \left[\frac{-1}{n+1}(x-\xi)^{n+1}\right]_{x_0}^{x} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta)(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

So ergibt sich schließlich das lagrangesche Restglied in (8.4). Wir können sogar zeigen, dass ein derartiges ζ im offenen Intervall (x_0, x) bzw. (x, x_0) existiert.

Ist das Restglied $R_n(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so liegt $f(x)$ als reelles Polynom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

mit maximalem Grad n vor. Ist umgekehrt $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom maximal n-ten Grades, so verschwindet dessen $n+1$-te Ableitung. Es gilt also in dieser Situation $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass auch das Restglied

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$$

verschwindet.

Taylor-Reihen sind wichtige Vertreter für Potenzreihen

Es liegt nun nahe, für beliebig oft differenzierbare Funktionen die Summe in der Taylor-Formel durch den Grenzübergang für $n \to \infty$ in eine unendliche Reihe übergehen zu lassen. Wir erhalten auf diese Weise eine Potenzreihe, die Taylor-Reihe.

Definition: Taylor-Reihe

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und x_0 eine beliebige Zahl aus dem Definitionsbereich von f. Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

heißt **Taylor-Reihe** von f um den Entwicklungspunkt x_0. Im Spezialfall $x_0 = 0 \in (a, b)$ wird die Taylor-Reihe auch als **MacLaurin-Reihe** bezeichnet. Sie hat dann die spezielle Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k.$$

Die Zuordnung einer Funktion zu ihrer Taylor-Reihe um x_0 wird als **Taylor-Entwicklung** von f um x_0 bezeichnet.

Die Taylor-Reihe ist also eine Potenzreihe. Sie besitzt daher den Konvergenzradius $r \geq 0$. Die Taylor-Reihe um x_0 einer beliebig oft differenzierbaren Funktion muss im Fall ihrer Konvergenz, wenn also $x \in D = \{x \,|\, |x - x_0| < r\}$ gilt, nicht unbedingt gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergieren. Ein berühmtes Beispiel ist die MacLaurin-Reihe der Funktion (Abb. 8.2)

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}.$$

Für $x \neq 0$ ist f beliebig oft differenzierbar. Es kann gezeigt werden, dass diese Funktion auch an der Stelle $x = 0$ beliebig oft differenzierbar ist und alle Ableitungen im Nullpunkt verschwinden: $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Taylor-Reihe von f um den Punkt $x_0 = 0$ (MacLaurin-Reihe) lautet daher

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k = 0.$$

Diese „Reihe" konvergiert trivialerweise sogar für alle $x \in \mathbb{R}$. Aber nur für $x = x_0 = 0$ ergibt sich auch der Funktionswert der Ausgangsfunktion f.

Es stellt sich somit die Frage, unter welchen Umständen die Taylor-Reihe einer Funktion im Fall der Konvergenz auch gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergiert. Wenn für x die Restgliedfolge gegen 0 konvergiert, d. h. falls

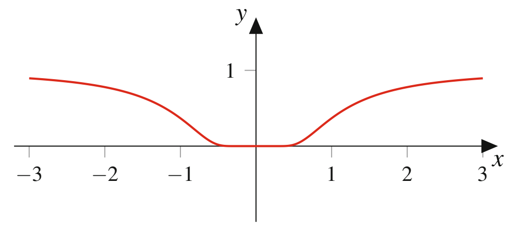

Abb. 8.2 Beispiel einer Funktion, deren Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ für $x \neq x_0$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

so konvergiert die Taylor-Reihe für dieses x gegen den Funktionswert $f(x)$. Eine systematische Untersuchung der Konvergenzeigenschaften von Taylor-Reihen gelingt aber erst mit Mitteln der komplexen Analysis. In der Funktionentheorie stellt man fest, dass holomorphe Funktionen, also Funktionen, die lokal um eine Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind, bereits beliebig oft dort komplex differenzierbar sind und sich innerhalb ihres Konvergenzkreises $D_r(z_0) := \{z \,|\, |z - z_0| < r\}$ in eine Taylor-Reihe um z_0 entwickeln lassen. Dort existiert also eine Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k, \qquad z \in D_r(z_0).$$

Dieses Kriterium ist für eine reelle Funktion f insofern nützlich, als dass im Fall der Existenz einer holomorphen Fortsetzung von f in $\mathbb{C}$ die Taylor-Reihe von f in einer Umgebung von x_0 gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergiert. Da die Funktionentheorie, also die Untersuchung komplexwertiger Funktionen auf komplexen Mengen, nicht Gegenstand dieser Einführung ist, müssen wir uns mit dieser bloßen Aussage begnügen.

Partialsummen von Taylor-Reihen können zur Näherung differenzierbarer Funktionen verwendet werden

Wenn nun die Konvergenz einer Taylor-Reihe gegen den Funktionswert in einer Umgebung um den Entwicklungspunkt x_0 gegeben ist, so bietet sich die Reihendarstellung von f an, um die Funktion dort durch Partialsummen der Taylor-Reihe zu approximieren:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Wir betrachten also nur die ersten $n+1$ Summanden der Reihe und schneiden den Rest ab. Hierdurch erhalten wir eine endliche Summe

$$T_{f,n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \in \mathbb{R}[x],$$

die als **Taylor-Polynom** von f um den Entwicklungspunkt x_0 der Ordnung n bezeichnet wird. Da es durchaus sein kann, dass die Ableitung mit der höchsten in dieser Summe vorkommenden Ordnung verschwindet (d. h. $f^{(n)}(x_0) = 0$), ist die Ordnung n des Taylor-Polynoms T_{f,n,x_0} eine Obergrenze für seinen Grad. Es gilt also

$$\operatorname{Grad} T_{f,n,x_0} \leq n.$$

Wir haben nun die Möglichkeit, den Funktionswert $f(x)$ durch das Taylor-Polynom näherungsweise zu berechnen: $f(x) \approx T_{f,n,x_0}(x)$. In der numerischen Mathematik ist dies Grundlage für viele Näherungsverfahren. Trivialerweise ist diese Näherung für $x = x_0$ exakt. Es kann durchaus weitere Situationen geben, in denen $f(x) = T_{f,n,x_0}(x)$ gilt. Sollten beispielsweise ab einem Index $k_0 \in \mathbb{N}_0$ alle Ableitungen um den Entwicklungspunkt verschwinden, d. h., falls $f^{(k)}(x_0) = 0$, so gilt $f(x) = T_{f,n,x_0}(x)$, sofern $n \geq k_0 - 1$. Dies gilt beispielsweise dann, wenn es sich bei f bereits um ein Polynom handelt. Liegt mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$$

ein Polynom n-ten Grades vor (d. h., für den Leitkoeffizienten gilt $a_n \neq 0$), so kann durch mehrfaches Ableiten das Polynom „zugrunde differenziert" werden, denn es gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k p}{\mathrm{d}x^k} = 0 \quad \text{für } k \geq n+1 \quad \text{sowie} \quad \frac{\mathrm{d}^n p}{\mathrm{d}x^n} = n! a_n \neq 0.$$

Ab der $n+1$-sten Ableitung verschwindet ein Polynom n-ten Grades. Daher gilt für ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ und einen beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$

$$p(x) = T_{p,m,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

für alle $m \geq \operatorname{Grad} p$.

Wenn jedoch für eine beliebig oft differenzierbare Funktion unendliche viele Ableitungen im Entwicklungspunkt x_0 nicht verschwinden, so kann im Fall der Konvergenz der Taylor-Reihe gegen $f(x)$ die Güte der Approximation von f durch das Taylor-Polynom T_{f,n,x_0} in der Regel dadurch verbessert werden, indem

- die Ordnung n erhöht wird,
- der Abstand von x zum Entwicklungspunkt x_0 erniedrigt wird bzw. der Entwicklungspunkt in die Interessensregion verlagert wird,
- eine eventuelle Periodizität der Funktion f ausgenutzt wird.

Um den letztgenannten Punkt zu erläutern, betrachten wir eine **periodische Funktion**. Hierunter versteht man eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für die es eine reelle Zahl $p > 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$f(x) = f(x+p) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Werte von f wiederholen sich also, wenn wir auf der x-Achse um den Wert p „weitergehen". Die Zahl p wird als **Periode** von f bezeichnet. Ist dabei die Zahl $p > 0$ minimal, so wird p als **kleinste (positive) Periode**, **minimale Periode** oder **primitive Periode** von f bezeichnet. Mit p ist auch jedes ganzzahlige Vielfache $n \cdot p$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Periode von f. Außerdem gilt $f(x) = f(x-p)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wenn wir nun das Taylor-Polynom einer periodischen und beliebig oft differenzierbaren Funktion f um einen Entwicklungspunkt x_0 an einer Stelle x' betrachten und mit zunehmender Entfernung der Stelle x' von x_0 eine Verschlechterung der Approximationsgüte beobachten, so können wir die Periodizität von f nutzen, um die Approximationsgüte zu verbessern. Hierzu ersetzen wir x' durch eine Stelle $x = x' \pm np$, indem wir ein geeignetes ganzzahliges Vielfaches np zu x' addieren oder subtrahieren, sodass $x = x' \pm np$ möglichst nahe bei x_0 liegt. Wir erhalten damit

$$f(x') = f(x' \pm np) = f(x) \approx T_{f,n,x_0}(x).$$

Für periodische Funktionen gibt es aber auch eine alternative Reihenentwicklung, die nicht auf Potenzreihen basiert. Hierbei betrachtet man Reihen, deren Summanden aus Linearkombinationen der Funktionen $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ für $k \in \mathbb{N}$ bestehen. Physikalisch interpretiert können wir mit $x = 2\pi\nu t$ unter dem Argument $kx = 2\pi \cdot k\nu \cdot t$ die Phase einer harmonischen Schwingung verstehen, sodass die ganzzahligen Frequenzvielfachen $k\nu$ als „Obertöne" einer Basisfrequenz ν aufgefasst werden können. Die hierauf basierenden Reihen heißen Fourier-Reihen. Ein periodisches (z. B. akustisches) Signal kann mithilfe einer Fourier-Reihe als Reihe von Obertonschwingungen dargestellt werden. Derartige Reihen erfordern jedoch einen weiteren Konvergenzbegriff, auf den wir nicht weiter eingehen wollen. Fourier-Reihen sind Gegenstand von Abschn. 8.3.

Für die Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ gilt $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von f um $x_0 = 0$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^0 x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Es ergibt sich als Taylor-Reihe wieder die Exponentialreihe. Hierbei handelt es sich um eine prinzipielle Aussage. Es kann gezeigt werden, dass eine Funktion, die durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ definiert ist,

$$\begin{aligned} f : D := (x_0 - r, x_0 + r) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k, \end{aligned}$$

als Taylor-Reihe um x_0 wieder genau diese Potenzreihe besitzt. Insbesondere folgt für das Taylor-Polynom der Ordnung n von f um x_0 für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$

$$T_{f,n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k,$$

Teil II

woraus sich unmittelbar der Wert der k-ten Ableitung von f an der Stelle x_0 ergibt:

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Das Taylor-Polynom zur Approximation der Exponentialfunktion um den Punkt $x_0 = 0$ der Ordnung n entspricht also genau der n-ten Partialsumme der Exponentialreihe. Wir erhalten mit

$$T_{\exp,n,0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{Q}[x]$$

ein Polynom n-ten Grades über $\mathbb{Q}$, d. h. mit rationalen Koeffizienten.

Wir betrachten nun das Taylor-Polynom n-ter Ordnung einer Funktion f um einen Entwicklungspunkt x_0 unabhängig von der Konvergenz der entsprechenden Taylor-Reihe:

$$T_{f,n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Es liegt die Vermutung nahe, dass sich das Taylor-Polynom um denselben Entwicklungspunkt x_0 der Funktion $g(x) = (x-x_0)^m \cdot f(x)$ der Ordnung $m + n$ mithilfe von T_{f,n,x_0} auf folgende Weise berechnen lässt:

$$\begin{aligned} T_{g,m+n,x_0}(x) &= T_{(x-x_0)^m \cdot f,m+n,x_0}(x) \\ &= (x - x_0)^m T_{f,n,x_0}(x). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Dies ist in der Tat der Fall, denn die Reihendarstellung von f ergibt auf ihrem Konvergenzbereich eine Darstellung von g

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - x_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^{k+m} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{(k - m)!} f^{(k-m)}(x_0)(x - x_0)^k \end{aligned}$$

als Potenzreihe. Wir wissen bereits, dass das Taylor-Polynom $m + n$-ter Ordnung um x_0 dieser Potenzreihe ihre $m + n$-te Partialsumme ist:

$$\sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{(k - m)!} f^{(k-m)}(x_0)(x - x_0)^k = T_{g,m+n,x_0}(x).$$

Fragen wir uns nun, was passiert, wenn wir im Beispiel der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion um 0, den Entwicklungspunkt verlagern, beispielsweise auf $x_0 = 1$. Es gilt $f^{(k)}(1) = \mathrm{e}$, und damit lautet die Taylor-Reihe von $f(x) = \mathrm{e}^x$ um $x_0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x - 1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}}{k!}(x - 1)^k = \mathrm{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x - 1)^k.$$

Das Taylor-Polynom zur Approximation der Exponentialfunktion um den Punkt $x_0 = 1$ der Ordnung n lautet daher

$$\begin{aligned} T_{\exp,n,1} &= \mathrm{e} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - 1)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e} \left(1 + x - 1 + \frac{(x - 1)^2}{2} + \cdots + \frac{(x - 1)^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Dieses Polynom n-ten Grades hat im Gegensatz zum Taylor-Polynom um $x_0 = 0$ keine rationalen Koeffizienten. Im Vergleich mit dem Taylor-Polynom um $x_0 = 0$ der Ordnung n fällt ein Zusammenhang auf. Es gilt

$$T_{\exp,n,1}(x) = \mathrm{e} \cdot T_{\exp,n,0}(x - 1). \tag{8.7}$$

Das Taylor-Polynom der Exponentialfunktion um den Punkt $x_0 = 1$ der Ordnung n ist also bis auf den Faktor e identisch mit dem Taylor-Polynom gleicher Ordnung der Exponentialfunktion um 0, wenn dort $x - 1$ statt x eingesetzt wird. Wenn wir nun noch beachten, dass für das Taylor-Polynom der linksverschobenen Funktion $\exp(x + 1)$ um 0

$$T_{\exp(x+1),n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{0+1} x^k = \mathrm{e} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

gilt, so folgt nach Einsetzen von $x - 1$

$$T_{\exp(x+1),n,0}(x - 1) = \mathrm{e} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x - 1)^k = \mathrm{e} \cdot T_{\exp,n,0}(x - 1).$$

Im Vergleich mit (8.7) folgt daher

$$T_{\exp,n,1}(x) = T_{\exp(x+1),n,0}(x - 1).$$

Anders ausgedrückt: Wenn wir das Taylor-Polynom n-ter Ordnung von der um den Wert 1 nach links verschobenen Exponentialfunktion $\exp(x + 1)$ um den Entwicklungspunkt 0 berechnen und in dieses Polynom $x - 1$ einsetzen, so erhalten wir das Taylor-Polynom der Exponentialfunktion n-ter Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in der Variablen x.

Zu erkennen ist hier ein Prinzip, das als eine Art Verschiebungsregel aufgefasst werden kann. Offenbar gibt es einen Zusammenhang zwischen der MacLaurin-Entwicklung einer gegenüber f verschobenen Funktion und dem Taylor-Polynom von f um x_0 gleicher Ordnung. Es gilt unabhängig von der Konvergenz der jeweiligen Reihen:

$$T_{f,n,x_0}(x) = T_{f_T,n,0}(x - x_0),$$

wobei die Funktion f_T aus f durch Translation (Verschiebung) hervorgeht:

$$f_T(x) = f(x + x_0).$$

Dieser Sachverhalt folgt durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} T_{f_T,n,0}(x - x_0) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_T^{(k)}(0)(x - x_0 - 0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \\ &= T_{f,n,x_0}(x). \end{aligned}$$

Hierbei beachten wir, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$f_T^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f_T(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x + x_0) = f^{(k)}(x + x_0)$$

gilt, woraus sich mit $x = 0$ die Beziehung $f_T^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$ ergibt.

Wir betrachten nun die Taylor-Entwicklung der gegenüber der Exponentialfunktion umskalierten Funktion $f(x) = \exp(2x)$ um den Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$. Zunächst gilt für die k-te Ableitung von f

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x) = 2^k \exp(2x), \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

In $x = \frac{1}{2}$ ausgewertet ergibt dies

$$f^{(k)}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2^k \exp\left(2 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 2^k \mathrm{e}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Taylor-Entwicklung von f lautet somit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^k &= \mathrm{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 2^k \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^k \\ &= \mathrm{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 2^k \left(\frac{2x}{2} - \frac{1}{2}\right)^k \\ &= \mathrm{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 2^k \cdot \frac{1}{2^k} (2x - 1)^k \\ &= \mathrm{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2x - 1)^k.\end{aligned}$$

Der Vergleich des Taylor-Polynoms dieser Funktion mit dem Taylor-Polynom der Exponentialfunktion gleicher Ordnung zeigt

$$T_{f,n,\frac{1}{2}}(x) = T_{\exp,n,1}(2x).$$

Auch diese Beobachtung können wir offenbar als eine Skalierungsregel verallgemeinern. Bei einer Funktion f_S, die aus einer anderen Funktion f durch Umskalierung mit einem konstanten Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ hervorgeht, d. h.

$$f_S(x) = f(\lambda x),$$

gilt

$$T_{f,n,x_0}(x) = T_{f_S,n,\frac{x_0}{\lambda}}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Es gilt nämlich für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$f_S^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(\lambda x) = \lambda^k f^{(k)}(\lambda x).$$

Für das Taylor-Polynom von f_S um $\frac{x_0}{\lambda}$ gilt daher

$$\begin{aligned}T_{f_S,n,\frac{x_0}{\lambda}}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k f^{(k)}(\lambda \tfrac{x_0}{\lambda})(x - \tfrac{x_0}{\lambda})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k f^{(k)}(x_0)(x - \tfrac{x_0}{\lambda})^k.\end{aligned}$$

Wenn wir das Taylor-Polynom in $\frac{x}{\lambda}$ auswerten, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}T_{f_S,n,\frac{x_0}{\lambda}}(\tfrac{x}{\lambda}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k f^{(k)}(x_0)(\tfrac{x}{\lambda} - \tfrac{x_0}{\lambda})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{1}{\lambda^k}(x - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = T_{f,n,x_0}(x).\end{aligned}$$

Beispiel

Betrachten wir nun ein Beispiel, das uns die Verbesserung der Taylor-Approximation mit zunehmender Ordnung veranschaulicht. Wir betrachten hierzu die Funktion

$$f(x) = (x - 1)^2 \exp(x - 1)$$

und berechnen die Taylor-Polynome $T_{f,n,1}$ von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ für die Ordnungen $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Zur Berechnung der k-ten Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 1$ ist es zweckmäßig, eine Tabelle zu erstellen:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
0	$f(x) = (x-1)^2 \exp(x-1)$	0
1	$(2(x-1) + (x-1)^2) \exp(x-1)$ $= (x^2 - 1) \exp(x-1)$	0
2	$(x^2 + 2x - 1) \exp(x-1)$	2
3	$(x^2 + 4x + 1) \exp(x-1)$	6
4	$(x^2 + 6x + 5) \exp(x-1)$	12

Hiermit ergeben sich die folgenden Taylor-Polynome:

$$\begin{aligned}T_{f,0,1}(x) &= \frac{1}{0!} f^{(0)}(1)(x-1)^0 = 0 \\ T_{f,1,1}(x) &= T_{f,0,1}(x) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(1)(x-1)^1 = 0 \\ T_{f,2,1}(x) &= T_{f,1,1}(x) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(1)(x-1)^2 = (x-1)^2 \\ T_{f,3,1}(x) &= T_{f,2,1}(x) + \frac{1}{3!} f^{(3)}(1)(x-1)^3 \\ &= (x-1)^2 + (x-1)^3 \\ T_{f,4,1}(x) &= T_{f,3,1}(x) + \frac{1}{4!} f^{(4)}(1)(x-1)^4 \\ &= (x-1)^2 + (x-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^4.\end{aligned}$$

Die steigende Güte der Approximationen wird durch die Graphen in Abb. 8.3 illustriert. Besonders eindrucksvoll zeigt hierbei das Taylor-Polynom zehnter Ordnung von f

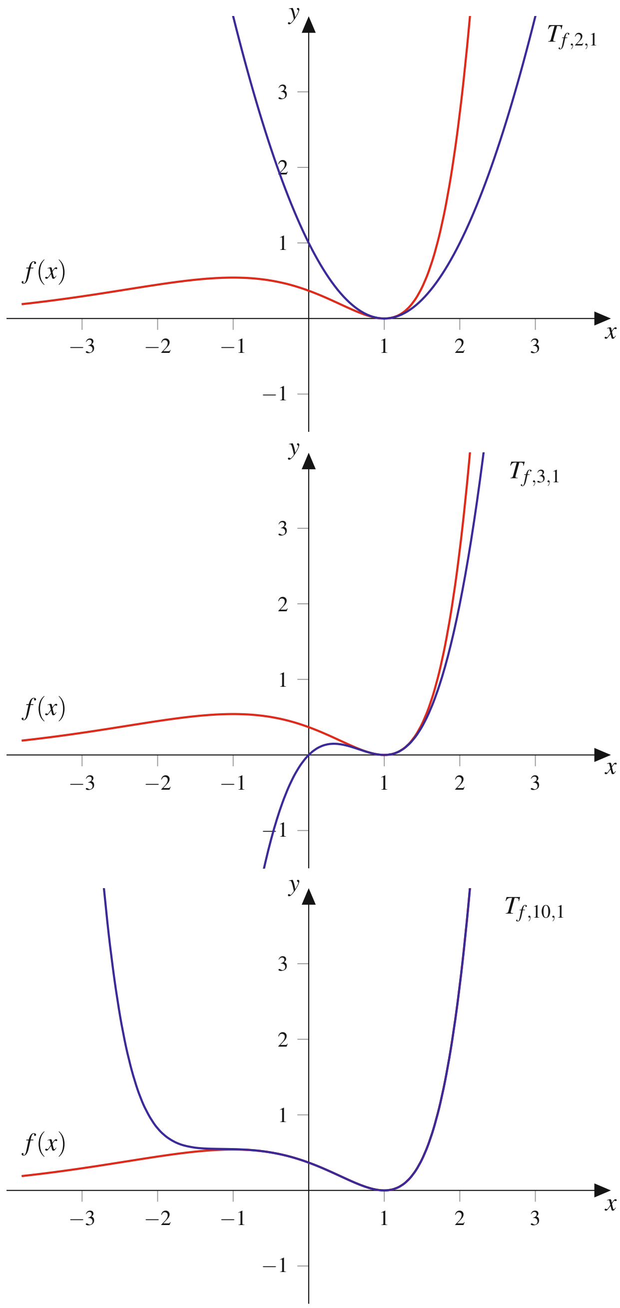

Abb. 8.3 Die Taylor-Polynome $T_{f,n,1}$ von $f(x) = (x-1)^2 \exp(x-1)$ für $n = 2, 3, 10$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$,

$$T_{f,10,1}(x) = (x-1)^2 + (x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{(x-1)^5}{6} + \frac{(x-1)^6}{24} + \frac{(x-1)^7}{120} + + \frac{(x-1)^8}{720} + \frac{(x-1)^9}{5040} + \frac{(x-1)^{10}}{40320}$$

$$= \frac{2119}{5760} - \frac{7417x}{20160} - \frac{7411x^2}{40320} + \frac{307x^3}{5040} + \frac{223x^4}{2880} + \frac{47x^5}{1440} + \frac{31x^6}{2880} + \frac{x^7}{720} + \frac{29x^8}{40320} - \frac{x^9}{20160} + \frac{x^{10}}{40320},$$

im Rahmen der Grafikauflösung von Abb. 8.3 einen vergleichsweise großen Bereich um $x_0 = 1$ der „Übereinstimmung" mit der Ausgangsfunktion f. ◀

Wenn wir im Term der Funktion $f(x) = (x-1)^2 \exp(x-1)$ nur den zweiten Faktor $\exp(x-1)$ durch ein Taylor-Polynom approximieren, beispielsweise durch $T_{\exp(x-1),4,1}$, so gilt aufgrund der Regel aus Gleichung (8.6)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 \exp(x-1) \\ &\approx (x-1)^2 T_{\exp(x-1),4,1}(x) \\ &= T_{(x-1)^2 \exp(x-1),6,1}(x) = T_{f,6,1}(x) \\ &= (x-1)^2 + (x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{(x-1)^5}{6} + \frac{(x-1)^6}{24}. \end{aligned}$$

So ergibt sich allein schon aus Gradgründen nicht das zuvor berechnete Taylor-Polynom vierter Ordnung $T_{f,4,1}$ von f um 1, sondern das Taylor-Polynom $T_{f,6,1}$ sechster Ordnung um 1 von f, das somit eine bessere Approximationsgüte liefert. Ob eine Teilapproximation eines Termbestandteils tatsächlich eine bessere Approximationsgüte für die Ausgangsfunktion ergibt oder nicht, ist abhängig von der jeweiligen Situation. Es kann sogar der Fall auftreten, dass sich bei einer Taylor-Approximation von Termbestandteilen einer Funktion f eine schlechtere Näherung ergibt gegenüber der Taylor-Approximation gleicher Ordnung von f selbst.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist in $x = 0$ durch $f(0) := 1$ stetig fortsetzbar und dort sogar (beliebig oft) differenzierbar. Die Taylor-Reihe dieser Funktion ist die um x gekürzte Sinusreihe:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \cdots. \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom der Ordnung 4 um $x_0 = 0$ lautet

$$T_{f,4,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \approx \frac{\sin x}{x}.$$

Wenn wir hingegen nur den Zähler $\sin x$ durch sein Taylor-Polynom der Ordnung 4 um $x_0 = 0$,

$$\sin x \approx T_{\sin,4,0}(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

als Einzelbestandteil innerhalb von f approximieren, so ergibt sich in diesem Beispiel im Vergleich mit $T_{f,4,0}$ eine schlechtere Approximation der Ausgangsfunktion

$$\frac{T_{\sin,4,0}(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} \approx \frac{\sin x}{x}.$$ ◂

Wir können die Taylor-Entwicklung auch dazu nutzen, um sog. Anfangswertaufgaben für Differenzialgleichungen in bestimmten Fällen zu lösen oder zumindest eine Reihenentwicklung für die Lösung zu gewinnen.

Unter einer Differenzialgleichung verstehen wir einen Aufgabentyp der folgenden Art: Gesucht ist eine (beliebig oft differenzierbare) Funktion, über die ein Reproduktionsverhalten beim Ableiten bekannt ist. Wir sprechen von einer Anfangswertaufgabe, wenn wir zusätzlich einen Funktionswert $f(x_0) = y_0$ mit $y_0 \in \mathbb{R}$ vorgeben.

Beispiel

Gesucht sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion f mit folgenden zwei Eigenschaften:

$$f'(x) = -(f(x))^2, \qquad f(1) = 2.$$

Diese Informationen reichen aus, um die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 1$ zu entwickeln. Hierzu stellen wir wieder eine Tabelle mit den Ableitungen von f und deren Werte in $x_0 = 1$ auf und berechnen dabei die höheren Ableitungen unter Berücksichtigung der Kettenregel:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$
0	$f(x)$	2
1	$f'(x) = -(f(x))^2$	-4
2	$f''(x) = -2(f(x)) \cdot f'(x)$ $= 2(f(x))^3$	16
3	$f^{(3)}(x) = 6(f(x))^2 \cdot f'(x)$ $= -6(f(x))^4$	-96
4	$f^{(4)}(x) = -24(f(x))^3 \cdot f'(x)$ $= 24(f(x))^5$	768
5	$f^{(5)}(x) = 120(f(x))^4 \cdot f'(x)$ $= -120(f(x))^6$	-7680
k	$f^{(k)}(x)$ $= (-1)^{k-1}k!(f(x))^{k-1} \cdot f'(x)$ $= (-1)^k k!(f(x))^{k+1}$	$(-1)^k k! \cdot 2^{k+1}$

Hieraus folgt für die Taylor-Reihe der gesuchten Funktion f um $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k \cdot k! \cdot 2^{k+1}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{k+1}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1}(1-x)^k \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty}(2-2x)^k.\end{aligned}$$

Wir erkennen hier eine geometrische Reihe, deren Konvergenz genau für diejenigen $x \in \mathbb{R}$ auftritt, für die

$$\begin{aligned}|2-2x| < 1 &\iff 2|x-1| < 1 \\ &\iff |x-1| < \tfrac{1}{2} \\ &\iff x \in \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

gilt. In dieser Situation lautet ihr Grenzwert

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{\infty}(2-2x)^k &= \frac{2}{1-(2-2x)} \\ &= \frac{2}{2x-1} =: g(x).\end{aligned}$$

Für die Funktion $g(x)$ gilt

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\frac{2 \cdot 2}{(2x-1)^2} \\ &= -\left(\frac{2}{2x-1}\right)^2 = -(g(x))^2, \\ g(x_0) &= g(1) = 2.\end{aligned}$$

Sie löst also die obige Differenzialgleichung und genügt dabei der Anfangswertvorgabe. ◂

Den theoretischen Hintergrund zu Differenzialgleichungen werden wir in Bd. 2 gesondert behandeln. Dort werden auch geeignetere Lösungsverfahren für bestimmte Standardsituationen vorgestellt.

Mithilfe von MATLAB können wir durch Verwendung der Symbolic Math Toolbox sehr leicht Taylor-Polynome hinreichend oft differenzierbarer Funktionen bestimmen.

Teil II

Anwendung: Bestimmung eines Taylor-Polynoms mit MATLAB

Wir berechnen das Taylor-Polynom der Funktion $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Ordnung $n = 10$. Da wir nun nicht numerisch, sondern symbolisch rechnen lassen möchten, müssen wir zunächst die Variable x innerhalb von MATLAB als symbolische Variable deklarieren. Dies geschieht duch den Befehl `syms x`. Die folgende Sequenz bestimmt nun das gesuchte Taylor-Polynom:

```
>> syms x
>> taylor(sin(x)*cos(x),x,0,'order',10)

ans =

(2*x^9)/2835 - (4*x^7)/315 + (2*x^5)/15
    - (2*x^3)/3 + x
```

Das gesuchte Taylor-Polynom lautet somit

$$T_{f,10,0}(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} + \frac{2x^9}{2835}.$$

Es ist möglich, das Taylor-Polynom in mathematisch typischer und damit leichter lesbarer Termdarstellung ausgeben zu lassen:

```
>> syms x
>> pretty(taylor(sin(x)*cos(x),x,0,
    'order',10))
   9        7        5        3
2 x      4 x      2 x      2 x
---- - ---- + ---- - ---- + x
2835     315      15        3
```

Wenn wir das Taylor-Polynom nun für gewisse x, etwa für $x = 0$ und $x = \pi$, auswerten möchten, ist es hilfreich, eine Funktion, beispielsweise $T(x)$, mit diesem Polynom vorher zu definieren:

```
>> syms x
>> T(x)=taylor(sin(x)*cos(x),x,0,'order'
    ,10)

T(x) =

(2*x^9)/2835 - (4*x^7)/315 + (2*x^5)/15
    - (2*x^3)/3 + x

>> T(0)

ans =

0

>> T(pi)

ans =

pi - (2*pi^3)/3 + (2*pi^5)/15 - (4*pi^7)
    /315 + (2*pi^9)/2835
```

Interessiert uns der numerische Wert von $T(\pi)$ als Dezimalzahl, so ergänzen wir:

```
>> eval(T(pi))

ans =

    5.949783267345573
```

Damit gilt also $T(\pi) \approx 5.949783267345573$.

Die lineare Taylor-Approximation dient als Grundlage für das Newton-Verfahren

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion, die eine Nullstelle a in I besitzt. Nicht immer ist es möglich, die Gleichung $f(x) = 0$ nach a aufzulösen, obwohl es nachweislich eine Lösung gibt. So schneidet sich beispielsweise der Graph der Logarithmusfunktion $\ln x$ und der Graph der Kehrwertfunktion $\frac{1}{x}$ in genau einem Punkt $a \in (0, \infty)$ (Abb. 8.4).

In diesem Schnittpunkt gilt $\ln x = \frac{1}{x}$. Wir können allerdings mit unseren Methoden diese Gleichung nicht nach x auflösen. Äquivalent zu dieser Gleichung ist $\ln x - \frac{1}{x} = 0$, sodass wir uns auch auf die Suche nach der Nullstelle von $f(x) := \ln x - \frac{1}{x}$ für $x > 0$ machen können. Da wir keine Chance haben, die Nullstelle a analytisch, also durch Termumstellung, exakt zu bestimmen, benötigen wir ein Näherungsverfahren, das uns die Nullstelle mit hinreichender Genauigkeit approximativ liefert.

Um nun eine Gleichung der Art $f(x) = 0$ näherungsweise zu lösen, bietet es sich an, f durch Taylor-Approximation gegen ein lineares Polynom zu ersetzen. Ein lineares Polynom hat genau eine Nullstelle. Diese Nullstelle wird zwar in der Regel nur eine Näherung für a darstellen, dafür können wir sie sehr einfach bestimmen. Wir wählen zu diesem Zweck einen Entwicklungspunkt x_0 möglichst in mutmaßlicher Nähe der Nullstelle a und betrachten das Taylor-Polynom von f um x_0 erster Ordnung:

$$T_{f,1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Die Gleichung $f(x) = 0$ lösen wir nun näherungsweise, indem wir $f(x)$ wegen $f(x) \approx T_{f,1,x_0}(x)$ durch $T_{f,1,x_0}(x)$ ersetzen. Diese Gleichung lösen wir dann nach x auf:

$$\begin{aligned} T_{f,1,x_0}(x) = 0 &\iff f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \\ &\iff x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =: x_1. \end{aligned}$$

Diese Näherung ist in der Regel fehlerbehaftet. Wie können wir diese Näherung verbessern? Wenn wir davon ausgehen, dass mit

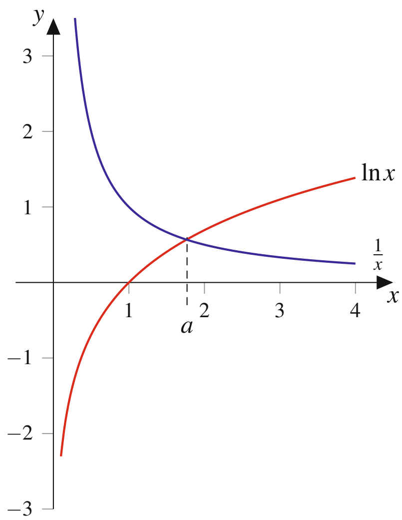

Abb. 8.4 Die Graphen der Funktionen $\ln x$ und $\frac{1}{x}$ schneiden sich an genau einer Stelle $a > 0$

x_1 ein besserer Näherungswert für a als mit x_0 in dem Sinne vorliegt, dass der Abstand $|a - x_1| < |a - x_0|$ ist, so können wir nun x_1 als neuen Entwicklungspunkt des Taylor-Polynoms erster Ordnung von f betrachten, um auf analoge Art zu einer noch weiter verbesserten Näherung zu gelangen. Wir bestimmen also die Nullstelle von $T_{f,1,x_1}(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$. Analog zur Berechnung von x_1 erhalten wir mit

$$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

einen weiteren Näherungswert, von dem wir uns einen gegenüber x_1 geringeren Abstand $|a - x_2| < |a - x_1|$ zur gesuchten Nullstelle a versprechen.

Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, dann gelangen wir auf diese Weise unter Vorgabe eines Startwertes $x_0 \in I$ zu einer iterativ definierten Folge:

$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1. \tag{8.8}$$

Solange $f'(x_{n-1}) \neq 0$ ist, kann die Iterierte x_n bestimmt werden. Ist dagegen $f'(x_{n-1}) = 0$, so ist das Taylor-Polynom $T_{f,1,x_{n-1}}$ konstant und besitzt, wenn es nicht gerade das Nullpolynom ist, keine Nullstelle. Das Verfahren kann dann nicht fortgesetzt werden. Im Fall der Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

liegt uns jedoch ein iteratives Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstelle a vor. In dieser Situation kann die Näherung durch eine hinreichend hohe Anzahl n der Iterierten x_n die gesuchte Nullstelle beliebig genau approximiert werden. Die Iterationsfolge (8.8) unter Vorgabe eines Startwertes x_0 wird als **Newton-Verfahren** bezeichnet.

Wir wollen nun versuchen, den Schnittpunkt der Logarithmusfunktion mit der Kehrwertfunktion mit dem Newton-Verfahren approximativ zu ermitteln. Hierzu bestimmen wir die Nullstelle der Funktion $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$. Für $x > 0$ ist f differenzierbar, und es gilt für die Ableitung

$$f'(x) = \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^2}.$$

Die Ableitung ist für alle $x > 0$ nullstellenfrei. Das Newton-Verfahren lautet dann mit einem Startwert $x_0 > 0$

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ &= x_{n-1} - \frac{\ln x_{n-1} - \frac{1}{x_{n-1}}}{\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-1}^2}} \\ &= x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 \ln x_{n-1} - x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}. \end{aligned}$$

Wir erkennen in Abb. 8.4, dass der gesuchte Schnittpunkt etwa bei $x_0 = 1.8$ liegt. Wir wählen nun als Startwert beispielsweise $x_0 = 2$. Mit MATLAB erhalten wir dann die folgenden Iterierten bei einer Ausgabe von 15 Nachkommasstellen:

n	x_n
0	2
1	1.742470425920073
2	1.763055873943722
3	1.763222823586074
4	1.763222834351897
5	1.763222834351897
6	1.763222834351897

Offenbar hat sich im Rahmen der Rechengenauigkeit bei 15 Nachkommastellen das Verfahren bereits ab der vierten Iterierten stabilisiert. Wenn wir diesen Wert in die Logarithmusfunktion (in MATLAB mit `log` bezeichnet) und in die Kehrwertfunktion einsetzen, so ergibt sich bei 15 Nachkommastellen in der Tat derselbe Wert:

$$\begin{aligned} \ln(x_4) &\approx 0.567143290409784, \\ \frac{1}{x_4} &\approx 0.567143290409784. \end{aligned}$$

Wenn wir x_4 in die Differenzfunktion $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ einsetzen, ergibt sich erwartunggemäß ein Wert in der Größenordnung von 10^{-16}:

$$f(x) = \ln x - \tfrac{1}{x} \approx 1.110223024625157 \times 10^{-16}.$$

Wir betrachten also 1.763222834351897 als Näherung, die auf 15 Nachkommastellen genau die Nullstelle a von f und damit den Schnittpunkt von $\ln x$ und $\frac{1}{x}$ repräsentiert. In Abb. 8.5 ist das Newton-Verfahren für $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, ausgehend vom Startwert $x_0 = 3.6$, mit zwei Iterationen illustriert. Es ist gut zu erkennen, dass sich die Iterierten x_1 und x_2 der Nullstelle a nähern.

Anwendung: Lösung einer Gleichung mit dem Newton-Verfahren in MATLAB

Um die Lösung a der Gleichung $\ln x = \frac{1}{x}$ und damit die Nullstelle der Funktion $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ numerisch mithilfe des Newton-Verfahrens

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 \ln x_{n-1} - x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$$

für $x_0 > 0$ zu approximieren, definieren wir eine Funktion in MATLAB mit dem Namen `newton_verfahren.m`:

```
function out=newton_verfahren(x)
  out = x-(x^2*log(x)-x)/(x+1)
```

Wir rufen nun diese Funktion auf, um ausgehend von einem Startwert, beispielsweise $x = 2$, fortlaufend die Iterierten zu berechnen:

```
>> x=2

x =

     2

>> x=newton_verfahren(x);

out =

   1.742470425920073

>> x=newton_verfahren(x);

out =

   1.763055873943722

>> x=newton_verfahren(x);

out =

   1.763222823586074

>> x=newton_verfahren(x);

out =

   1.763222834351897

>> x=newton_verfahren(x);

out =

   1.763222834351897

>> x=newton_verfahren(x);

out =

   1.763222834351897
```

Wir erkennen, dass sich das Verfahren bereits nach vier Aufrufen im Rahmen der Rechengenauigkeit stabilisiert hat. Nun prüfen wir, ob tatsächlich die Werte der Logarithmusfunktion und des Kehrwertes für die letzte Iterierte im Rahmen dieser Präzision übereinstimmen:

```
>> log(x)

ans =

   0.567143290409784

>> 1/x

ans =

   0.567143290409784
```

Der Unterschied müsste unterhalb der Schwelle von 10^{-15} liegen. Dies können wir uns bestätigen lassen:

```
>> log(x)-1/x

ans =

     1.110223024625157e-16
```

Ist der Startwert aber zu weit von a entfernt, so konvergiert das Verfahren nicht mehr. Beispielsweise liefert der Startwert $x_0 = 4.5$ eine negative erste Iterierte $x_1 = -0.2195\ldots$ Dieser Wert liegt nicht mehr im Definitionsbereich des Logarithmus. Das Verfahren bricht an dieser Stelle erfolglos ab. Dieses Phänomen liegt darin begründet, dass die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ für den Startwert $x_0 = 4.5$ mit $f'(x_0) = 0.2716\ldots$ betragsmäßig so klein wird, dass das Taylor-Polynom $T_{f,1,x_0}$ eine zu geringe Steigung aufweist. Im Gegensatz zur Situation beim Startwert $x_0 = 3.6$ befindet sich für $x_0 = 4.5$ die Nullstelle x_1 bereits im negativen Bereich.

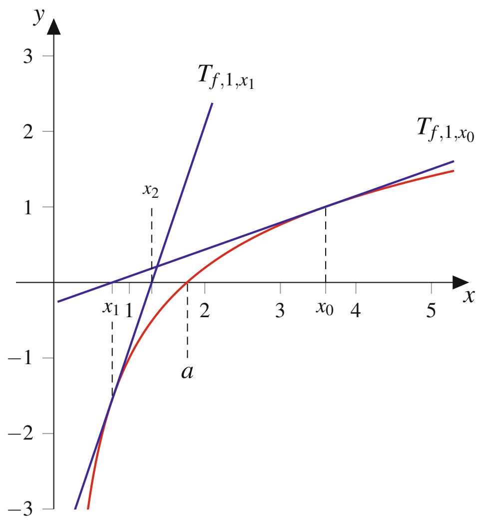

Abb. 8.5 Der Graph der Funktion $\ln x - \frac{1}{x}$ sowie die Taylor-Polynome $T_{f,1,x_0}$ und $T_{f,1,x_1}$ für $x_0 = 3.6$, deren Nullstellen die Iterierten x_1 und x_2 darstellen

8.3 Fourier-Reihen

Bei der Taylor-Reihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion handelt es sich um eine Potenzreihe. Konvergiert die Taylor-Reihe gegen die Funktion, so besteht die Möglichkeit, die Funktion durch ein Polynom hinreichend genau zu approximieren, indem die Taylor-Reihe an geeigneter Stelle abgeschnitten, also durch eine Partialsumme genähert wird.

Trigonometrische Polynome bestehen aus Sinus- und Kosinusbestandteilen

In diesem Abschnitt betrachten wir eine weitere Art der Reihenentwicklung. Wir versuchen dabei, eine periodische Funktion durch Linearkombinationen der Funktionen

$$\cos(kx), \quad \sin(kx), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

in eine Reihendarstellung zu bringen. Zu diesem Zweck wiederholen wir an dieser Stelle die Definition einer periodischen Funktion:

Definition: Periodische Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **periodisch** mit der Periode $p > 0$ oder kurz p-periodisch, wenn

$$f(x) = f(x + p) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ist f periodisch mit der Periode p, so ist f auch periodisch mit der Periode $n \cdot p$ für $n \in \mathbb{N}$. Zudem gilt $f(x) = f(x \pm np)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die trigonomtrischen Funktionen sin und cos sind beispielsweise 2π-periodische Funktionen. Ebenso ist die imaginäre Exponentialfunktion $\exp(\mathrm{i}x)$ periodisch mit der Periode 2π. Sind f und g zwei p-periodische Funktionen, so ist auch jede Linearkombination von f und g,

$$h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x),$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ eine p-periodische Funktion. Für jede p-periodische Funktion f ist $\phi(x) := f(kx)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ebenfalls p-periodisch:

$$\phi(x + p) = f(k(x + p)) = f(kx + kp) = f(kx) = \phi(x).$$

Wir können jede p-periodische Funktion f durch Umskalieren in eine 2π-periodische Funktion überführen. Hierzu betrachten wir $g(x) := f(p \cdot \frac{x}{2\pi})$. Es gilt dann

$$g(x + 2\pi) = f(p \cdot \tfrac{x+2\pi}{2\pi}) = f(p \cdot \tfrac{x}{2\pi} + p) = f(p \cdot \tfrac{x}{2\pi}) = g(x).$$

Umgekehrt können wir auch aus jeder 2π-periodischen Funktion g eine p-periodische Funktion machen, indem wir $f(x) := g(2\pi \cdot \frac{x}{p})$ betrachten. Hier gilt nämlich

$$f(x + p) = g(2\pi \cdot \tfrac{x+p}{p}) = g(2\pi \cdot \tfrac{x}{p} + 2\pi) = g(2\pi \cdot \tfrac{x}{p}) = f(x).$$

Die vorausgegangene Umskalierung finden wir in vielen Anwendungen wieder, wenn wir harmonische Schwingungen mithilfe der Sinus- bzw. Kosinusfunktion darstellen wollen. So ist beispielsweise

$$f(t) := \sin(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

eine sinusförmige Funktion mit Periode T. Der Faktor ω dient also zur Umskalierung der Sinusfunktion auf die T-periodische Funktion f. Häufig wird mit t die Zeit und mit T die Periodendauer eines schwingenden Systems bezeichnet. Wir bezeichnen dann ω als **Kreisfrequenz** und den Kehrwert der Periodendauer $\nu = T^{-1}$ als **Frequenz** des betrachteten Systems.

Da wir nun jede 2π-periodische Funktion in eine p-periodische Funktion umskalieren können, beschränken wir uns im Folgenden auf 2π-periodische Funktionen. Ist also f eine 2π-periodische Funktion, dann legt bereits ihre Einschränkung $f|_{[a,a+2\pi)}$ auf ein beliebiges, halboffenes Intervall der Länge 2π das Verhalten von f auf ganz $\mathbb{R}$ fest. Es reicht daher aus, f im Intervall $[-\pi, \pi)$ zu betrachten.

Mit den beiden 2π-periodischen Funktionen sin und cos sind aufgrund der obigen Überlegungen auch die **trigonometrischen Polynome**

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{8.9}$$

2π-periodisch. Ähnlich wie bei Polynomen sind die Koeffizienten a_k und b_k eines trigonometrischen Polynoms eindeutig bestimmt. Stimmen also

$$P(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

$$S(x) := \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k' \cos(kx) + b_k' \sin(kx))$$

überein, d.h. gilt

$$P(x) = S(x),$$

so ist ein Koeffizientenvergleich möglich, und es gilt dann notwendig

$$a_0 = a_0', \quad a_k = a_k', \quad b_k = b_k', \quad k = 1, 2, \ldots$$

Wir können dies durch Integration von (8.9) sowie durch Integration der Ausdrücke

$$P(x)\cos(kx), \quad P(x)\sin(kx), \quad k = 1, 2, \ldots$$

zeigen, da sich hieraus die Koeffizienten a_k und b_k eindeutig ergeben. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k}[a_k \sin(kx) - b_k \cos(kx)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k}(a_k \sin(k\pi) - b_k \cos(k\pi) \\ &\qquad - a_k \sin(-k\pi) + b_k \cos(-k\pi)) \\ &= \pi \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k}(a_k \sin(k\pi) - b_k \cos(k\pi) \\ &\qquad + a_k \sin(k\pi) + b_k \cos(k\pi)) \\ &= \pi \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2a_k}{k} \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \\ &= \pi \cdot a_0.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für $l = 1, 2, \ldots, n$ kann in ähnlicher Weise

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\cos(lx)\,\mathrm{d}x = \pi \cdot a_l,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\sin(lx)\,\mathrm{d}x = \pi \cdot b_l$$

gezeigt werden, wobei hierbei die leicht nachzuweisenden **Orthogonalitätsrelationen**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\pi, & k = l,\\ 0, & k \neq l,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x = 0$$

mit $k, l = 1, 2, \ldots, n$ genutzt werden. Damit gilt für die Koeffizienten a_0, a_k, b_k, für $k = 1, 2, \ldots, n$ des trigonometrischen Polynoms (8.9)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x.$$

Wir können mithilfe der komplexen Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ das trigonometrische Polynom (8.9) auch etwas kompakter darstellen:

$$\begin{aligned}P(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2} - \mathrm{i}\,\frac{b_k}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \sum_{k=-n}^{-1}\left(\frac{a_{-k}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{b_{-k}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}c_0 &:= \frac{a_0}{2}, \\ c_k &:= \frac{1}{2}\left(a_k - \mathrm{i}b_k\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ c_k &:= \frac{1}{2}\left(a_{-k} + \mathrm{i}b_{-k}\right), \quad k = -1, -2, \ldots, -n\end{aligned}$$

folgt dann

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

2π-periodische Funktionen lassen sich mithilfe trigonometrischer Polynome approximieren

Es liegt nun folgender Gedanke nahe: Wenn wir für eine 2π-periodische Funktion f, wie beim trigonometrischen Polynom, die Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

bestimmen und mit diesen Koeffizienten das entprechende trigonometrische Polynom

$$P_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

konstruieren, so stellt sich die Frage, ob bzw. unter welchen Bedingungen mit $P_{f,n}(x)$ eine sinnvolle Approximation von $f(x)$ vorliegt. Ähnlich wie beim Taylor-Polynom ist diese Frage eng mit der Konvergenz von $P_{f,n}(x)$ gegen $f(x)$ für $n \to \infty$ verbunden. Ein für die Praxis gegenüber dem Approximationshintergrund viel bedeutender Sachverhalt ist zudem die Frage, wie sich ein periodisches Signal f aus sinus- und kosinusförmigen Schwingungen mit ganzzahligen Vielfachen einer Grundfrequenz, den Oberschwingungen, linear kombiniert zusammensetzt. Die Anteile an den einzelnen Oberschwingungen sind dann durch die Koeffizienten gegeben. Bei der Untersuchung der Frage, welche Funktionen sich unter welchen Bedingungen durch eine Reihe dieser Art darstellen lassen, sind allerdings tiefergreifende Konvergenzbegriffe unerlässlich. Zunächst fällt auf, dass für die Berechnung der Koeffizienten a_k und b_k die o. g. Integrale existieren müsssen. Für eine in der Praxis häufig auftretende Klasse von Funktionen können wir diese Bedingung garantieren und halten das folgende Resultat fest.

Satz: Darstellung einer reellen 2π-periodischen Funktion als Fourier-Reihe

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf $[-\pi, \pi]$ stückweise stetige und stückweise monotone, also mit höchstens endlich vielen isolierten Extremalstellen, ausgestattete 2π-periodische Funktion. Dann ist in jeder Stetigkeitsstelle x von f der Funktionswert $f(x)$ als konvergente **Fourier-Reihe**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) \qquad (8.10)$$

mit **Fourier-Koeffizienten**

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

darstellbar. Ist x dagegen eine Unstetigkeitsstelle von f, so konvergiert die Fourier-Reihe von f gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert von f an der Stelle x:

$$\frac{\lim\limits_{\xi\nearrow x} f(\xi) + \lim\limits_{\xi\searrow x} f(\xi)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)).$$

Diese Mittelwertsregel gilt trivialerweise auch in den Stetigkeitsstellen von f. Wie beim trigonometrischen Polynom können wir die Fourier-Reihe auch mithilfe der komplexen Exponentialfunktion darstellen. Dazu definieren wir unter den Voraussetzungen des letzten Satzes

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_{-k} + \mathrm{i}b_{-k}) \\ &= \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x, \quad k = -1, -2, \dots \end{aligned}$$

oder zusammengefasst für $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x.$$

Damit gilt unter den Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

Bei geraden bzw. ungeraden 2π-periodischen Funktionen besteht die Fourier-Reihe nur aus Kosinus- bzw. Sinustermen

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten einer 2π-periodischen Funktion, die den Voraussetzungen des vorausgegangenen Satzes genügt, ist folgende Regel nützlich:

Teil II

Fourier-Koeffizienten gerader und ungerader 2π-periodischer Funktionen

- Ist f ungerade, gilt also $f(-x) = -f(x)$, so verschwinden die Kosinuskoeffizienten. Genauer gilt

$$a_k = 0, \qquad k \geq 0,$$
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x, \qquad k \geq 1.$$

- Ist f gerade, gilt also $f(-x) = f(x)$, so verschwinden die Sinuskoeffizienten. Genauer gilt

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, \qquad k \geq 0,$$
$$b_k = 0, \qquad k \geq 1.$$

Wir begründen diese Regel nur für den Fall einer ungeraden Funktion. Für eine gerade Funktion ist der Nachweis analog durchführbar. Mit einer ungeraden Funktion $f(x)$ ist das Produkt $f(x)\cos(x)$ ebenfalls ungerade, und daher gilt für die Kosinuskoeffizienten

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} (-f(-t)\cos(-kt))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos(-kt)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(-t)\cos(-kt)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

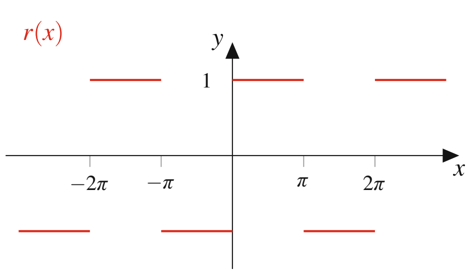

Abb. 8.6 Rechteckschwingung

Der Integrand $f(x)\sin(x)$ ist dagegen als Produkt zweier ungerader Funktionen wieder gerade. Daher gilt für die Sinuskoeffizienten

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} (-f(-t)\sin(-kt))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Beispiel: Rechteckschwingung

Wir betrachten die stückweise stetige und stückweise monotone (nicht streng monotone), 2π-periodische Funktion

$$r(x) = \begin{cases} -1, & x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi), \\ 1, & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi) \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Der Graph dieser Funktion beschreibt eine Rechteckschwingung (Abb. 8.6). Da $r(-x) = -r(x)$ ist, handelt es sich um eine ungerade Funktion. Die Fourier-Reihe wird daher ausschließlich Sinussummanden enthalten. Es gilt also $a_k = 0$ für $k \geq 0$ sowie

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi r(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{k\pi}[-\cos(kx)]_0^\pi = \frac{2}{k\pi}[\cos(kx)]_\pi^0\\
&= \frac{2}{k\pi}(\cos(0) - \cos(k\pi))\\
&= \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, & k \text{ ungerade,} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

für $k \geq 1$. Damit lautet die Fourier-Reihe von r

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{\pi}\sin(x) + \frac{4}{3\pi}\sin(3x) + \frac{4}{5\pi}\sin(5x) + \cdots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)x).
\end{aligned}$$

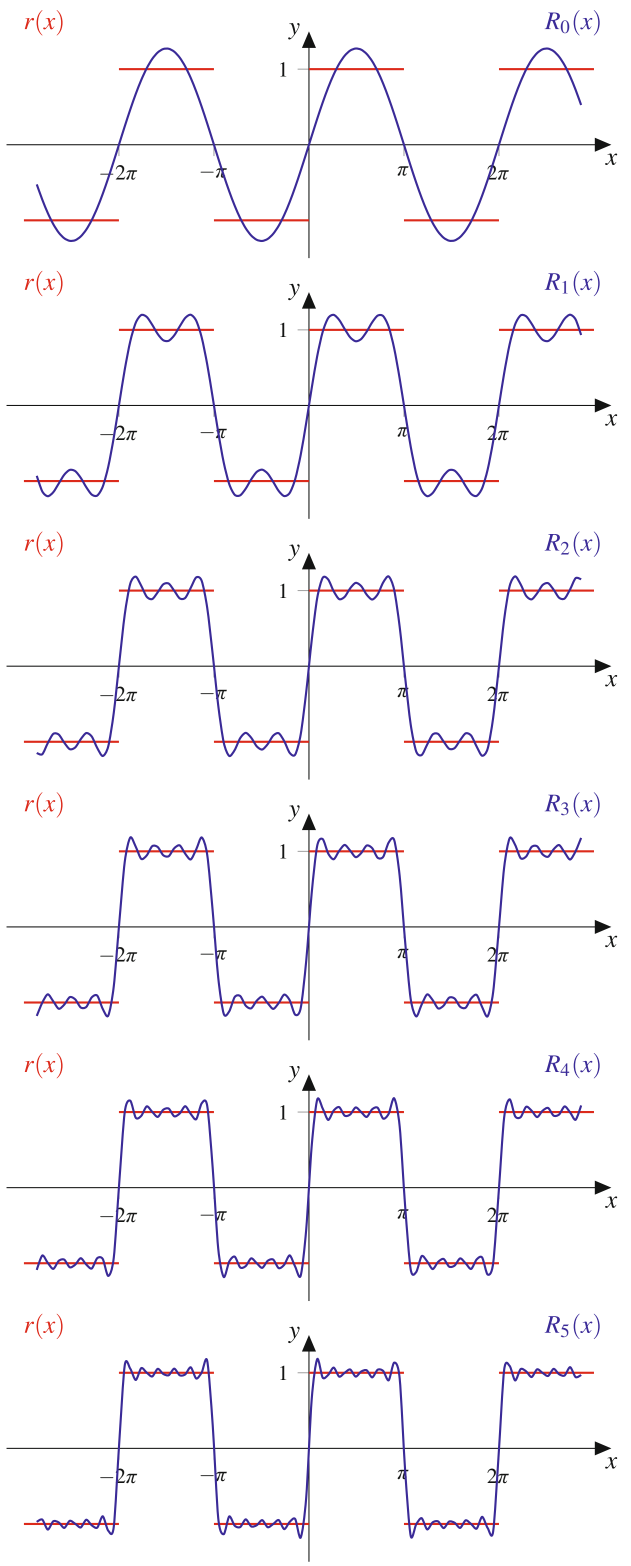

Abb. 8.7 Die ersten Partialsummen $R_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x)$ der Fourier-Reihe einer Rechteckschwingung, die durch $r(x)$ gegeben ist

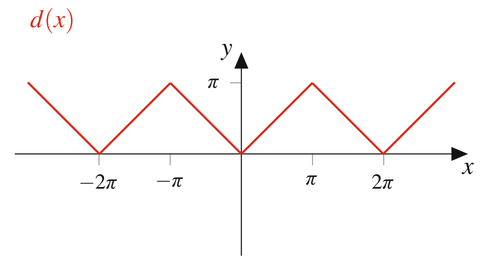

Abb. 8.8 Dreieckschwingung

In Abb. 8.7 sind zudem die Partialsummen

$$R_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x)$$

für $n = 0, 1, \ldots, 5$ der Fourier-Reihe dargestellt. Es fällt auf, dass in den Unstetigkeitsstellen von r bereits die Partialsummen der Fourier-Reihen die Mittelwertsregel zeigen. ◀

Beispiel: Dreieckschwingung

Der Graph der 2π-periodischen Funktion

$$d(x) = \begin{cases} -x + 2k\pi, & x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi), \\ x - 2k\pi, & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi) \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ beschreibt eine Dreieckschwingung (Abb. 8.8). Da $d(-x) = d(x)$ ist, handelt es sich um eine gerade Funktion. Die Fourier-Reihe wird daher ausschließlich Kosinussummanden enthalten. Es gilt also $b_k = 0$ für $k \geq 1$ sowie

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(kx)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{k^2\pi} [kx \sin(kx) + \cos(kx)]_0^\pi \\ &= \frac{2}{k^2\pi} (k\pi \sin(k\pi) + \cos(k\pi) \\ &\qquad - k \cdot 0 \sin(k \cdot 0) - \cos(k \cdot 0)) \\ &= \frac{2}{k^2\pi} (\cos(k\pi) - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{k^2\pi}, & k \text{ ungerade}, \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

für $k \geq 1$. Zudem gilt

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} [x^2]_0^\pi = \pi.$$

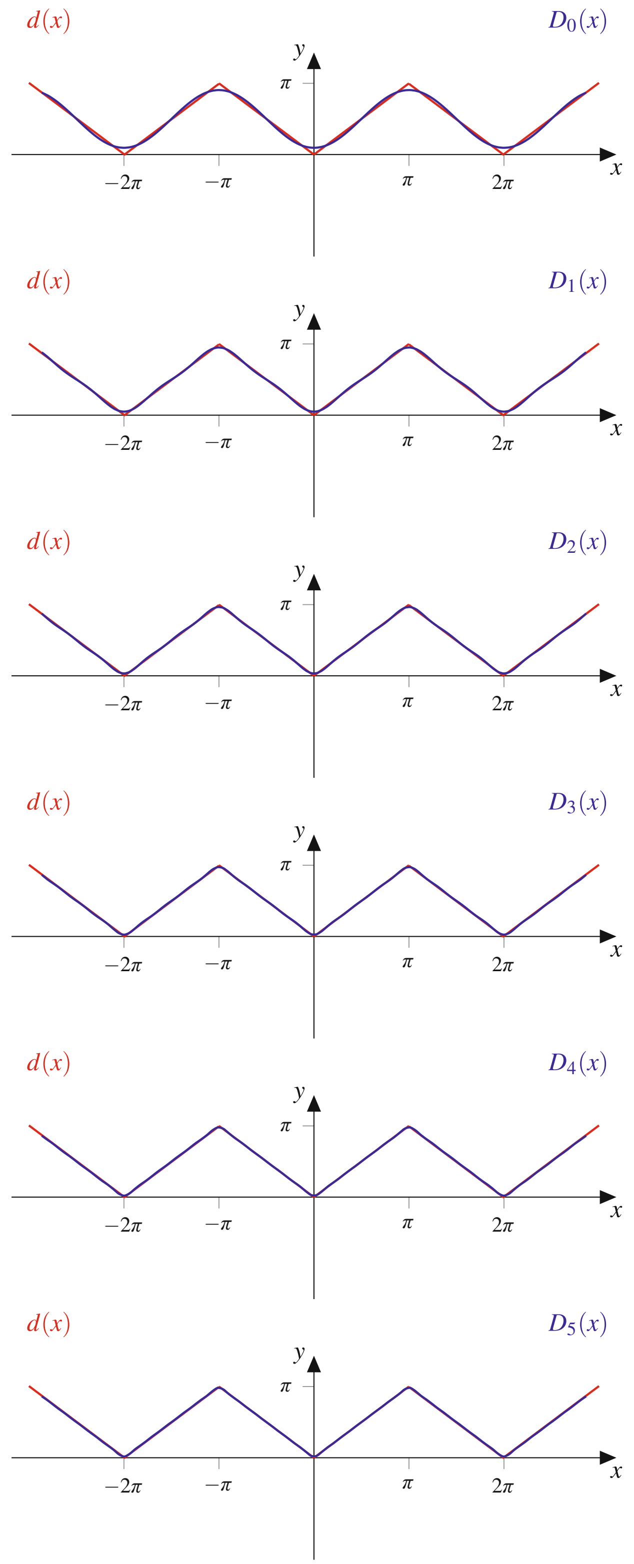

Abb. 8.9 Die ersten Partialsummen $D_n = \frac{\pi}{2} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \cos((2k+1)x)$ der Fourier-Reihe einer Dreieckschwingung, die durch $d(x)$ gegeben ist

Damit lautet die Fourier-Reihe von d

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x) - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi}\cos(5x) + \cdots \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi}\cos((2k+1)x).\end{aligned}$$

In Abb. 8.9 sind zudem die Partialsummen

$$D_n(x) := \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(2k+1)^2\pi}\cos((2k+1)x)$$

für $n = 0, 1, \ldots, 5$ der Fourier-Reihe dargestellt. ◀

Bislang haben wir Fourier-Reihen ausschließlich für 2π-periodische Funktionen betrachtet. In der Praxis treten allerdings auch Funktionen mit ganz anderen Perioden auf. Hierzu betrachten wir für $l > 0$ eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Periode $p = 2l$, die auf dem Intervall $[-l, l]$ stückweise stetig und stückweise monoton ist. Durch die zu Beginn dieses Abschnitts betrachtete Umskalierung

$$g(x) := f(p \cdot \tfrac{x}{2\pi}) = f(2l \cdot \tfrac{x}{2\pi}) = f(\tfrac{l}{\pi} \cdot x)$$

erhalten wir mit g eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ stückweise stetige und stückweise monotone 2π-periodische Funktion, für die sich nach dem letzten Satz eine Darstellung als Fourier-Reihe angeben lässt. Die Kosinuskoeffizienten lauten dann für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tfrac{l}{\pi}\cdot x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos(\tfrac{k\pi}{l}\cdot t)\cdot\tfrac{\pi}{l}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos(\tfrac{k\pi}{l}\cdot t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Eine entsprechende Rechnung ergibt die Sinuskoeffizienten für $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin(\tfrac{k\pi}{l}\cdot t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir halten das sich hieraus ergebende Resultat fest.

Satz: Darstellung einer reellen $2l$-periodischen Funktion als Fourier-Reihe

Es sei $l > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2l$-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[-l, l]$ stückweise stetig und stückweise monoton ist. Dann ist für jede Stetigkeitsstelle t von

f der Funktionswert $f(t)$ als konvergente Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(\tfrac{k\pi}{l}t) + b_k \sin(\tfrac{k\pi}{l}t)\right) \qquad (8.11)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos(\tfrac{k\pi}{l}t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin(\tfrac{k\pi}{l}t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

darstellbar. An jeder Unstetigkeitsstelle t gilt die Mittelwertsregel

$$\frac{\lim\limits_{\tau\nearrow t} f(\tau) + \lim\limits_{\tau\searrow t} f(\tau)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(\tfrac{k\pi}{l}t) + b_k \sin(\tfrac{k\pi}{l}t)\right).$$

Aufgaben

8.1 Nähern Sie die folgenden Ausdrücke durch das Taylor-Polynom $T_{f,n,x_0} \in \mathbb{R}[x]$ der Ordnung n für den jeweils angegebenen Entwicklungspunkt x_0:

a) $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$ für $x_0 = 0$ und $n = 6$
b) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x + 9$ für $x_0 = 1$ und $n = 5$
c) $f(x) = \dfrac{\exp(2x+1)}{2x+1}$ für $x_0 = 0$ und $n = 2$
d) $f(x) = \tan x$ für $x_0 = 0$ und $n = 4$
e) $f(x) = \mathrm{e}^x$ für $x_0 = 0$ und $n = 3$
f) $f(x) = \mathrm{e}^x$ für $x_0 = 1$ und $n = 3$

8.2 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit $f'(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 1$.

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom von f der Ordnung 4 um $x_0 = 0$.
b) Es kann sehr leicht gezeigt werden, dass die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Wie lautet deren Grenzwert? Hinweis: Aufgrund der absoluten Konvergenz dürfen die Summanden umgeordnet werden.

8.3 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in I$. Zeigen sie, dass f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) ist. Hinweis: Zeigen Sie dies durch Widerspruch unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung.

8.4 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Sägezahnschwingung

$$s(x) = x - 2k\pi, \quad x \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

8.5 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe für die 2π-periodischen Funktionen

$$f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

und

$$g(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Was fällt auf (Additionstheoreme)?

Teil II